Μαθημα 14ο — 25/4/2018

Κλασσικη

Διαγραμματα Φασης

Υποθετουμε οτι στην εξισωση $\ddot{x} = f(x)$ η $f(x)$ αντιστοιχει στη συνολικη δυναμη που ασκειται στο συστημα. Τοτε

1) Εαν η $f(x)$ αλλαξει προσημο απο θετικο σε αρνητικο περνώντας απο το σημειο ισορροπιας, το σημειο ειναι ευσταθες και το συστημα εκτελει ταλαντωση

2) Εαν η $f(x)$ αλλαξει προσημο απο αρνητικο σε θετικο το σημειο ειναι ασταθες

Παραδειγμα

$f(x) = x^3 - x$

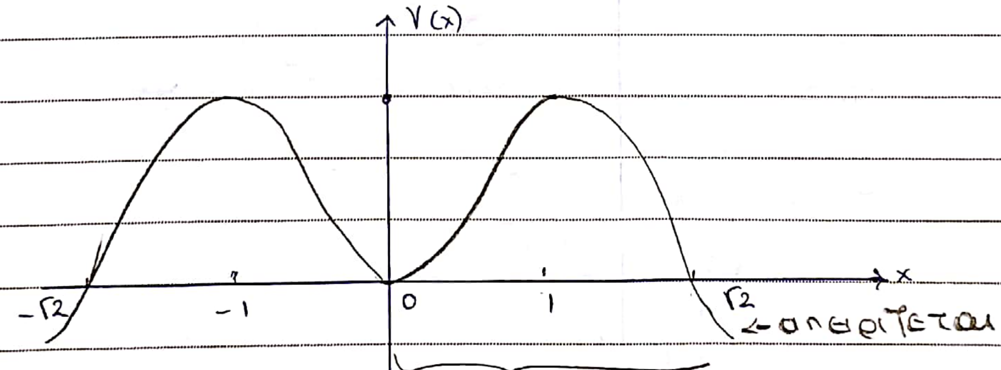
$\ddot{x} = x^3 - x = f(x)$

$V(x) = \int f(x)\, dx = -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)$

και σε αυτη τη περιπτωση του εκρεμμου η ενεργεια διατηρειται

$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 = \int f(x)\, dx = -V(x) + E \Rightarrow \frac{1}{2}(\dot{x}) + V(x) = E$

Σημεια ισορροπιας $f(x)=0$: $\begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$



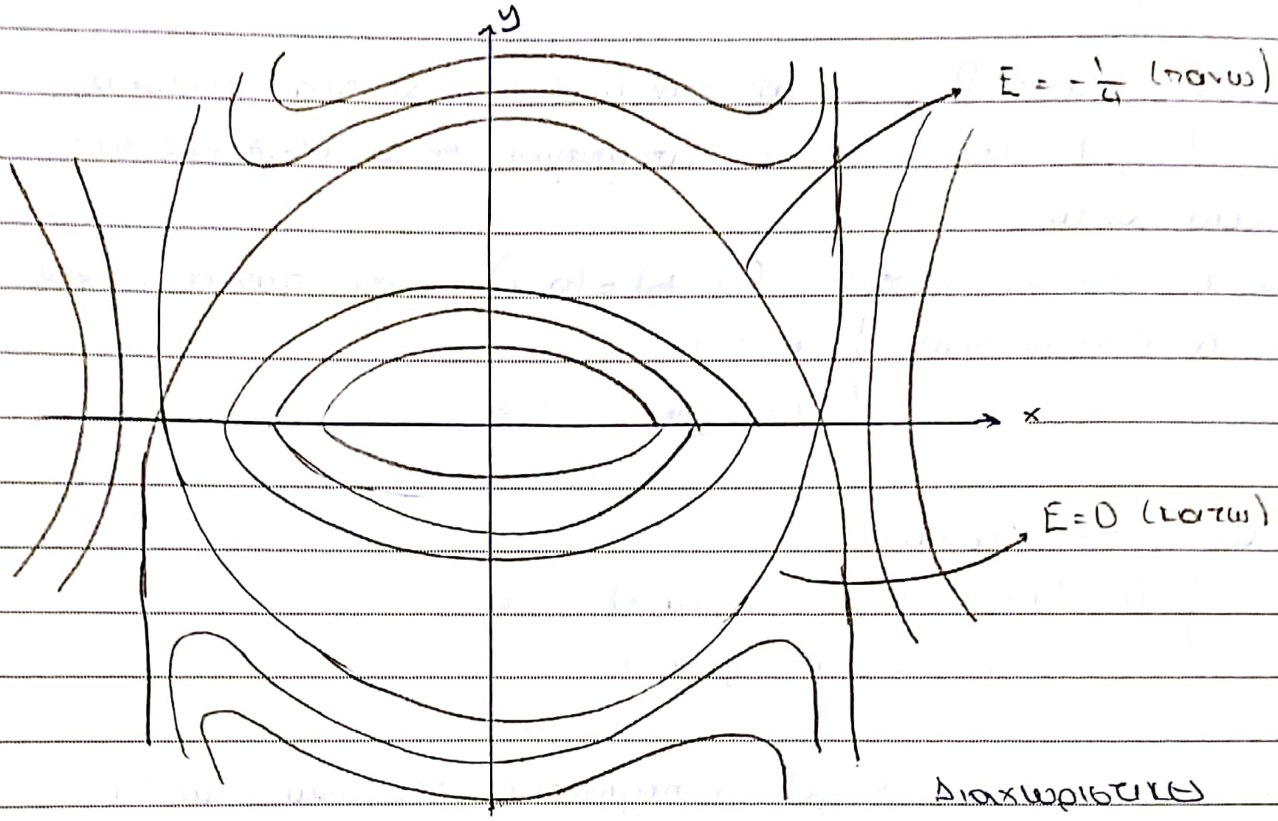
πρωτα κανω αυτο το αλλο συμμετρικο αφου αρτιοι συναρτηση

$$V(x) = -\frac{1}{4}\left(x^4 - 2x^2\right)$$

Πώς σχεδιάζω τη καμπύλη;
① βρίσκω τα σημεία που μηδενίζει
② έχω τρία ακρότατα $0, -1, 1$

$$V(x) = -\int f(x)\,dx \Rightarrow f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

έκει που έχω σημείο ισορροπίας για τη V έχω ακρότατο



Ευστάθεια και γραμμικοποίηση συστημάτων

Θεωρούμε ένα αυτόνομο σύστημα στη γενική μορφή

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

και ένα κρίσιμο σημείο του

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x,y) \qquad f(x_0,y_0) = g(x_0,y_0) = 0$$

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στη γειτονιά του (x_0,y_0) και όλες οι παράγωγοι είναι συνεχείς στο σημείο αυτό

Θεωρώ λοιπόν χβγ $(x_0,y_0) = (0,0)$ γιατί πάντα μπορώ να αντικαταστήσω
$$\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$$

Σ' αυτή τη περίπτωση

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u+x_0, v+y_0) = f_1(u,v) \\ \dot{v} = g(u+x_0, v+y_0) = g_1(u,v) \end{cases}$$

Στη γειτονιά του (x_0,y_0) χρησιμοποιώ θεώρημα Taylor

$$f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{df}{du}\right|_{(x_0,y_0)} u + \left.\frac{df}{dv}\right|_{(x_0,y_0)} v + r(u,v)$$

και $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \dfrac{r(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0$

Αντίστοιχα γράφω το Θ. Taylor για τη συνάρτηση g έτσι ώστε

$$\frac{du}{dt} = f_x(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot v$$
$$\frac{dv}{dt} = g_x(x_0,y_0) + g_y(x_0,y_0)\cdot v \quad = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{u}}{dt} = J(x_0,y_0)\,\vec{u}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad J(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)}$

Τότε έχω ένα σύστημα 2x2 γραμμικό και ο πίνακας J αντιστοιχεί στο γνωστό μας Ιακωβιανό πίνακα.

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = 3x - x^2 - xy$

$g(x,y) = y + y^2 - 3xy$

Σταθερά σημεία $\begin{cases} 3x - x^2 - xy = 0 \\ y + y^2 - 3xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3-x-y) = 0 \\ y\,(1+y-3x) = 0 \end{cases}$

Λύσεις : $(0,0)$, $(0,-1)$, $(3,0)$, $(1,2)$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 3-y \end{cases}$

$x=0$: $y(1+y) = 0$
$y=0 \quad y=-1$

$x = 3-y$: $y(1+y-9+3y) = 0$
$y(-8+4y) = 0$
$y = 0 \quad x = 3$
ή $y = 2 \quad x = 1$

Έστω το $(x_0,y_0) = (1,2)$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \begin{pmatrix} 3-2x-y & -x \\ -3y & 1+2y-3x \end{pmatrix}_{(1,2)} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}\vec{u}$$

Κρίσιμα σημεία γραμμικών συστημάτων

Εξετάζουμε το κρίσιμο σημείο (0,0) του γραμμικού συστήματος

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

και βρίσκουμε τις ιδιότητες του πίνακα A

Δηλαδή λύνουμε την $\det(A-\lambda I)=0$

Τότε η λύση των ιδιοτιμών μπορεί να είναι

1. πραγματικές διακριτές με το ίδιο πρόσημο
2. πραγματικές διακριτές με διαφορετικό πρόσημο
3. πραγματικές και ίσες
4. μιγαδικές
5. φανταστικές δηλ. μιγαδικές με μηδενικό πραγματικό μέρος

- Πραγματικές διακριτές με ίδιο πρόσημο

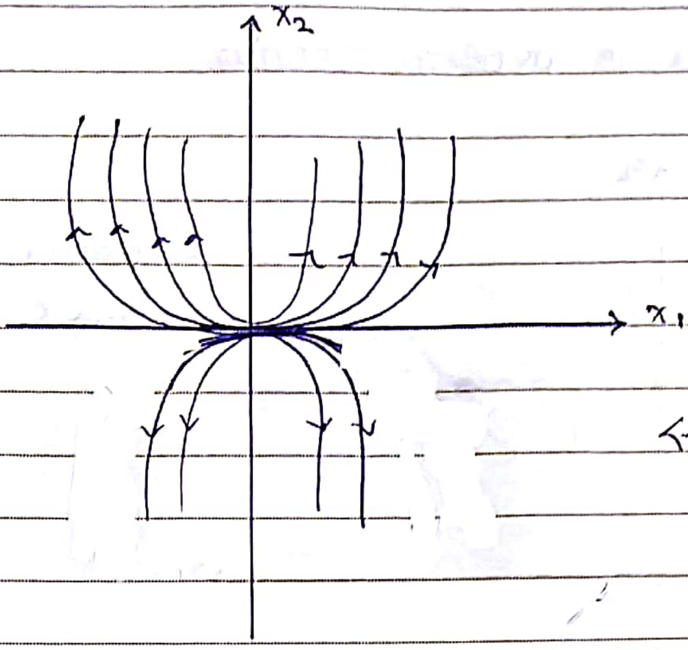
Η λύση του συστήματος είναι :

$$\vec{x}(t) = \vec{c_1}\, e^{\lambda_1 t} + \vec{c_2}\, e^{\lambda_2 t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) = c_3 e^{\lambda_1 t} + c_4 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

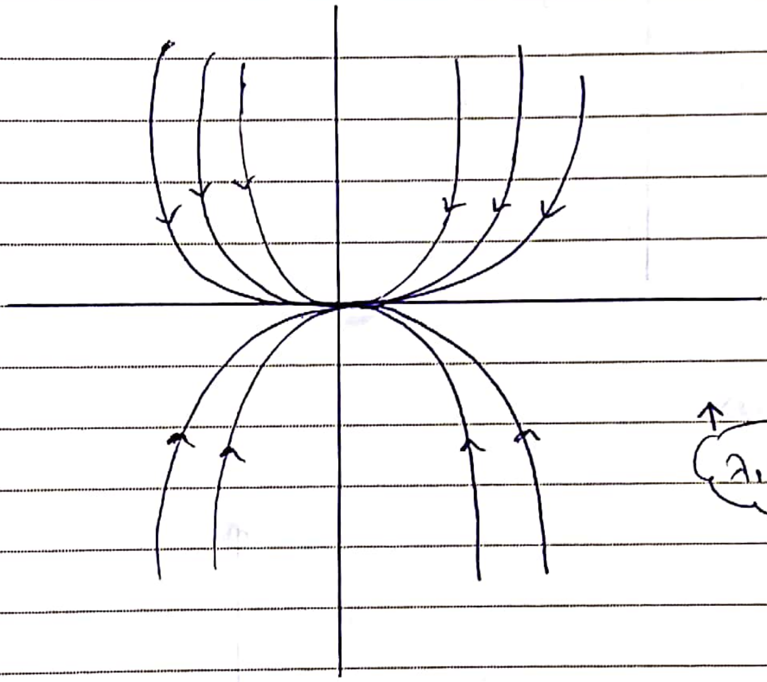
Ειδική περίπτωση $\begin{cases} x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 = c_4 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{c_1} = (e^t)^{\lambda_1} \\ \dfrac{x_2}{c_4} = (e^t)^{\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow x_2 = C x_1^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$$



Πηγή

$\lambda_1, \lambda_2 > 0$

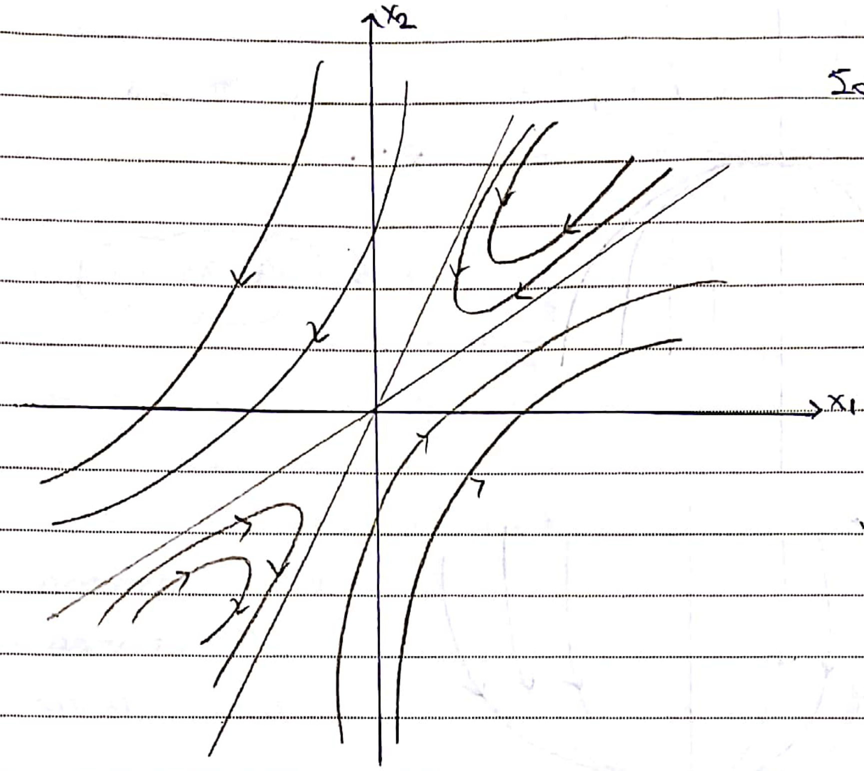


σημείο συσσώρευσης

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$

• Πραγματικες διακριτες με αντιθετο προσημο

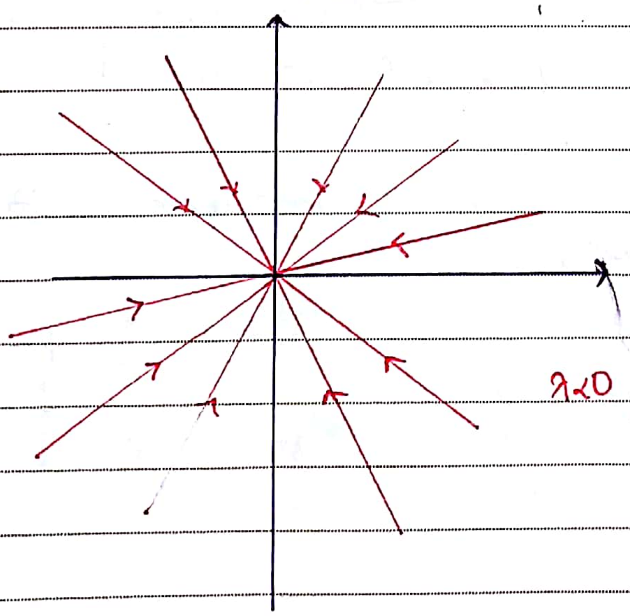
$x_2 = C e^{\lambda_2/\lambda_1} \; x_1$



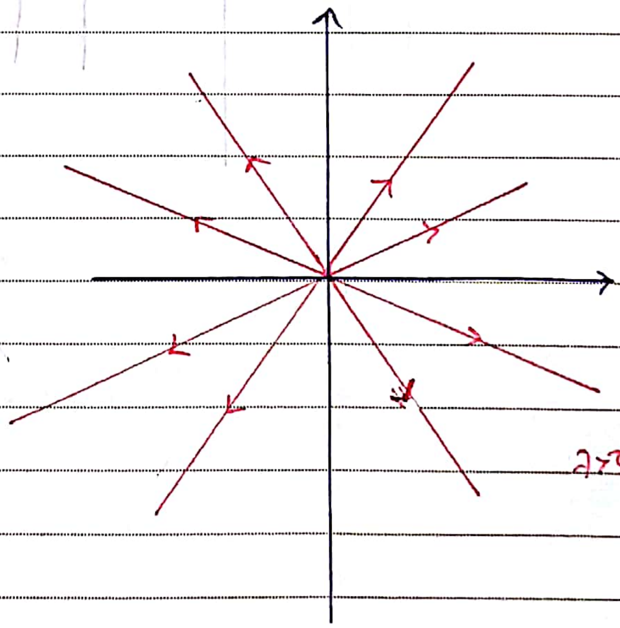
Σαγματικο Σημειο

• Πραγματικες και ισες

$x_2 = C x_1$



$\lambda < 0$



$\lambda > 0$